

Estrategias de enseñanza de conceptos de cálculo

Strategies for teaching Calculus concepts

Martha Patricia Jiménez Villanueva

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo, México
mpjvillanueva1972@gmail.com

Gelacio Castillo Cabrera

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo, México
gcastilloc@ipn.mx

María del Rosario Rocha Bernabé

Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Cómputo, México
rosario.rocha@gmail.com

Resumen

Un factor que influye en la apropiación y el rendimiento por parte de los estudiantes en relación con conceptos propios del cálculo (p. ej., límite, derivada e integral) es el enfoque pedagógico elegido por el profesor para explicarlos. Por tal motivo, el objetivo de este trabajo es diseñar una estrategia para presentar los conceptos de dicha disciplina a estudiantes universitarios. Para ello, en principio, se realizó una revisión documental con el propósito de conocer algunas de las estrategias didáctica que han resultado exitosas para presentar ese tipo de temas. La investigación, en concreto, se realizó con 9 estudiantes de la carrera Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Politécnico Nacional. A estos se les preguntó sobre los métodos empleados por sus profesores para introducir los conceptos de cálculo, entre los que se encontraron los siguientes: 1) el enfoque discursivo de enseñanza, 2) el enfoque centrado en el aprendizaje mediante la participación de los estudiantes a través de situaciones en contexto, 3) el enfoque basado en los conocimientos previos de los estudiantes mediante lluvias de ideas y 4) el enfoque que relaciona la derivada con la integral. Con base en los resultados se diseñó una estrategia para presentar el concepto de la integral definida que procura contribuir a elevar el índice de aprobación en la mencionada asignatura.

Palabras clave: Cálculo, estrategias de enseñanza, integral definida.

Abstract

A factor that influences the appropriation and efficiency of students in relation to concepts of calculus (e.g., limit, derivative and integral) is the pedagogical approach chosen by the teacher to explain them. For this reason, the objective of this document is to design a strategy to present the concepts of this discipline to university students. For this, first, a documentary review was carried out with the purpose of knowing some of the didactic strategies that have been successful in presenting this type of topics. The research, in particular, was carried out with 9 students from the Computer Systems Engineering career at the Instituto Politécnico Nacional. They were asked about the methods used by their teachers to introduce the concepts of calculus, among which the following were found: 1) the discursive approach to teaching, 2) the focus on learning through the participation of students through situations in context, 3) the approach based on previous knowledge of students through brainstorming and 4) the approach that relates the derivative to the integral. Based on the results, a strategy was designed to present the concept of the defined integral that seeks to contribute to raising the approval rate in the aforementioned subject.

Keywords: calculus, teaching strategies, definite integral.

Fecha Recepción: Enero 2018

Fecha Aceptación: Mayo 2018

Introducción

En México las carreras orientadas a las ingenierías dedican al estudio del cálculo dos semestres (cálculo diferencial y cálculo integral) en el nivel medio superior y uno o dos semestres en el nivel superior. Sin embargo, el bajo índice de aprobación demuestra las dificultades de los estudiantes en estas unidades de aprendizaje. De hecho, diferentes autores han aportado evidencia de que los conceptos que se manejan en el área del cálculo son difíciles de comprender para muchos estudiantes. Esto ha provocado que diversas investigaciones de tipo cognitivo en didáctica de las matemáticas se hayan centrado en este asunto (Bezuidenhout y Olivier, 2000; Orton, 1983), mientras que otras lo hayan hecho en proponer alternativas pedagógicas para una mejor comprensión de dicho fenómeno (Camacho, Depool y Santos-Trigo, 2004; Cordero, 2005; Camacho, M. y Depool, R., 2003, 2003a; Turégano, 1998), algunas de las cuales reportan resultados favorables, específicamente en el dominio del concepto de integral definida.

Un factor que influye en la apropiación por parte de los estudiantes de las definiciones propias del cálculo es el enfoque elegido por el profesor en el salón de clase. En relación con la integral definida, Orton (1983) señala que resulta ingenuo considerar que se puede llegar a la comprensión de dicho constructo por medio de ciertas habilidades de cálculo con integrales estrechamente ligadas a la integral como antiderivación.

Por este motivo, el objetivo de esta investigación es identificar estrategias de enseñanza para introducir conceptos de cálculo y plantear un camino para relacionarlas. Si bien en este documento se reportan las estrategias relacionadas con el concepto *integral definida*, estas también reflejan los métodos empleados en la enseñanza de otros conceptos del cálculo. Así, en la primera parte se presenta un recorrido general por las investigaciones centradas en el estudio del concepto de integral definida, especialmente en aquellas que proponen un determinado enfoque para introducir dicho concepto matemático. En la segunda parte se presenta el método empleado, mientras que en la tercera se describen las estrategias identificadas en la presentación de la integral definida. Luego, con base en los resultados analizados en las secciones uno y tres, se presenta una propuesta de enseñanza de la integral definida, la cual se vincula con diferentes

estrategias. Por último, en las conclusiones se ofrecen algunas reflexiones sobre el trabajo realizado y la pertinencia de su continuación.

Antecedentes

A continuación se comentan los resultados de algunas investigaciones que reportan resultados favorables en relación con la comprensión de conceptos de cálculo, particularmente vinculados con la integral definida. Estos estudios se describen en orden cronológico para observar cómo ha evolucionado el tema de este estudio en el campo científico.

Turégano (1998), por ejemplo, propone presentar la integral a partir de su definición geométrica, es decir, partir de la hipótesis de que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos del cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las habilidades algorítmicas usuales, utilizando la visualización para dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de *área bajo una curva*. Al respecto, plantea lo siguiente:

Para iniciar al estudiante en el estudio del cálculo infinitesimal es más adecuado utilizar una secuencia del currículum del cálculo y un enfoque de la integración de acuerdo con su génesis histórica [para lo cual propone] comenzar con la integral definida, independientemente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de límite (p. 236).

Turégano (1998) afirma que presentar el concepto de integral definida a través de su definición geométrica permite introducir el estudio de conceptos como *sucesión, límite, número real e integral* en el contexto del cálculo de áreas bajo curvas, lo cual favorece la transferencia a otros contextos.

Asimismo, y desde la perspectiva del uso de herramientas digitales en la enseñanza del cálculo, Camacho y Depool (2003, 2003a) y Camacho, Depool y Santos-Trigo (2004) analizan

la influencia del uso del Derive¹ en la idea de área limitada por una curva y el eje x . Para ello, elaboran un programa de utilidades (PU) con el objeto de introducir el concepto de integral definida mostrando cómo aproximar el área limitada por una curva. El programa tiene la característica de que en él se puede seguir el procedimiento de cálculo del área aproximada de una manera gráfica y numérica, utilizando rectángulos superiores e inferiores y tomando el punto medio de la base de cada rectángulo, así como el método de trapecios y porciones de parábola (regla de Simpson).

Después de poner en marcha las experiencias, Camacho y Depool (2003) y Camacho *et al.* (2004) concluyen lo siguiente: al introducir el concepto de integral definida desde la perspectiva gráfica y numérica con el uso del Derive, se consigue que los estudiantes descubran que existen procedimientos aproximados que, en muchas ocasiones, permiten resolver problemas que en otros casos serían demasiado complicados. En tal sentido, el uso de actividades programadas con las utilidades que ofrece Derive influye en la forma en que los estudiantes interpretan las tareas propuestas y favorece un cierto progreso en el empleo de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida. El PU, por tanto, proporciona una herramienta efectiva en el momento de calcular integrales definidas, donde el integrando está constituido por funciones cuyas primitivas no pueden ser expresadas mediante funciones elementales.

Desde otro punto de vista, Cordero (2005) sugiere iniciar con situaciones de enseñanza que enfoquen más la atención en contextos específicos de variación y cambio. Apoyando este enfoque, Hernández (2007) señala que “un estudiante universitario puede ser capaz de calcular derivadas e integrales con un elevado grado de dificultad y no ser capaz de identificar cuándo debe aplicar una de estas operaciones para resolver un problema particular” (p. 3).

Por otro lado, Thompson y Silverman (2007) plantean introducir el concepto mediante la función de acumulación; ellos retoman las ideas de Thompson (1994), quien destaca el

¹ Derive es un programa que permite realizar operaciones de cálculo simbólico entre las que se encuentran operaciones con vectores, matrices y determinantes, derivar e integrar; programar funciones y utilizar ficheros con funciones (programa de utilidades-PU) definidas por otros usuarios para propósitos diversos, como resolver ecuaciones diferenciales, trabajar con álgebra lineal (Camacho, M. y Depool, R., 2003a, p 122).

desarrollo de los estudiantes acerca del concepto de integrales a través de ideas de acumulación, variación y suma de Riemann como ideas fundamentales de la integración. Thompson y Silverman juntan esas ideas definiendo la suma de Riemann para intervalos fijos, pero modificando la definición de manera que Δx fuera un parámetro y x una variable, es decir, se mantiene Δx constante y se varía x en lugar de mantener x constante y variar Δx .

$$f_{\Delta x, a}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{x-a}{\Delta x} \right\rfloor} f(i\Delta x + a)\Delta x, a \leq x \leq b$$

Otro trabajo que se destaca por el uso de herramientas digitales es el de Camacho, Depool y Garbín (2008), quienes, por una parte, han estudiado la manera en que el uso de Derive ayuda a reconocer aspectos que se consideran importantes al resolver problemas en distintos contextos² (p. ej., identificar información, resolver casos particulares, usar diferentes sistemas de representación, conversión y coordinación entre ellos, y cómo comunicar resultados) y, por la otra, han analizado si la interpretación de la integral definida como área determina la concepción de los estudiantes durante la resolución de tales problemas. Estos autores, con base en el análisis de los datos recabados, afirman que los estudiantes identifican con eficiencia la información proporcionada cuando trabajan con funciones continuas en el contexto matemático, no así cuando las funciones son continuas a trozos; asimismo, usan diferentes sistemas de representación e incluso hacen conversiones, aunque se evidencia una falta de coordinación entre ellos.

Por este motivo, Camacho *et al.* (2008) consideran que el CAS contribuye eficientemente a promover la construcción del concepto de integral definida cuando aparece asociado al cálculo de áreas; sin embargo, cuando se trabaja con problemas en contextos distintos al matemático no es más que un artefacto de cálculo. Esto quiere decir que queda

² Se entiende como *problemas en diversos contextos* tanto los planteados en el ámbito estrictamente matemático como los aplicados en otras ciencias (Gravemeijer y Doorman, 1999, citado por Camacho *et al.*, 2008, p. 34).

incompleto el proceso de génesis instrumental³ necesario para una apropiación total de la herramienta tecnológica como un instrumento de aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, investigaciones más recientes aportan información relacionada con las construcciones y mecanismos mentales que un estudiante podría desarrollar en la comprensión del concepto de integral definida. En esta línea, y desde el enfoque de la teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas) podemos señalar la de Boigues, Llinares y Estruch (2010), quienes apuntan lo siguiente:

En el desarrollo del esquema de integral definida los estudiantes deben tener una determinada noción de límite y de sucesión que les permita construir una sucesión de áreas de rectángulos cuyas bases se apoyan en una división o partición de un intervalo $[a, b]$ sobre el eje OX y cuyas alturas se calculan a través de las imágenes de la función que representa a la curva. Finalmente, el uso de la idea de sucesión entendida como una función dependiendo del valor de n de la partición aplicado a las sumas de Riemann les debe permitir construir el esquema de Integral Definida (p. 259).

Lo anterior conduce a los autores a proponer un modelo cognitivo para la construcción del concepto de integral definida, que relaciona las nociones de partición de un intervalo, sumas de Riemann y límite de la sucesión de sumas de Riemann de manera anidada. Boigues *et al.* (2010), por tanto, sostienen que los datos obtenidos en el estudio ponen de manifiesto que, siguiendo las construcciones previstas en el modelo cognitivo, al menos 6 de los 40 estudiantes fueron capaces de establecer la noción de la integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Este modo de construir la integral se encuentra en sintonía con el contenido hallado en el análisis de los textos que reflejan un significado institucional que se esperaba que alcanzaran los alumnos de disciplinas relacionadas con la ingeniería del medio ambiente y las ciencias de la naturaleza. Además, los resultados apoyan las conclusiones de las investigaciones

³ Trouche (2004) señala que la génesis instrumental puede ser vista como la combinación de dos procesos: un *proceso de instrumentalización* (dirigido hacia el artefacto cargándolo de potencialidades y transformándolo para usos específicos) y un *proceso de instrumentación* (dirigido hacia el sujeto conduciéndolo al desarrollo o a la apropiación de esquemas).

relacionadas con la comprensión de la integral (Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Orton, 1983), las cuales sugieren que previo a abordar el estudio de las sumas de Riemann, se debe realizar un tratamiento más intensivo de las sucesiones y su límite para lograr una comprensión significativa de este concepto.

Con base en los resultados conseguidos, Boigues *et al.* (2010) proponen incluir los siguientes elementos en el modelo cognitivo: 1) plantear las particiones y las sumas de Riemann con expresiones algebraicas que completen los aspectos gráficos y numéricos, y 2) introducir, como variable propia del esquema, el elemento límite de una sucesión como el valor que permite el paso de una aproximación al valor exacto y un mayor desarrollo de la idea de función, aspectos que se visualizan en los libros de cálculo que generalmente se proponen en los programas de estudio de las carreras de ingeniería (Larson y Edwards, 2010; Leithold 1998).

Igualmente, un trabajo más reciente desde el enfoque de la teoría APOE (Arnon *et al.* 2014; Dubinsky, 1991) es el realizado por Puga-Nathal (2013). Esta autora centra su atención en las construcciones mentales que realizan los alumnos a partir de representaciones geométricas, focalizando principalmente la integral como una función primitiva, así como su relación con el concepto de derivada. Puga-Nathal señala que, de acuerdo con los resultados de la investigación, los principales conflictos para los participantes (en el sentido que menos construcciones realizaron) surgieron cuando manipularon objetos matemáticos relacionados con las construcciones débiles que debieron ser consolidadas en otras etapas escolares. Por ejemplo, infieren que no es posible estimar áreas de una curva debido a que no conocen una fórmula que se ajuste al modelo generado y carecen de esquemas que les permita estimar áreas a partir de segmentar cada vez más la región en cuestión.

En síntesis, las investigaciones presentadas aportan información sobre aspectos didácticos y cognitivos para el diseño de una enseñanza que pretende profundizar más en los aspectos conceptuales de los conceptos que en los aspectos algorítmicos. En tal sentido, se han identificado diferentes acercamientos para presentar el concepto de integral definida, en los cuales se enfatiza la necesidad de tener conocimientos sólidos de función para acceder al concepto de integral definida: por ejemplo, geométrico (Puga-Nathal, 2013), donde la graficación de funciones y la idea de antiderivada juegan un papel central; suma de Riemann

(Boigues *et al.*, 2010), donde esta es una función del número de subintervalos, y función de acumulación de Riemann (Thompson y Silverman, 2007), donde esta es precisamente una función.

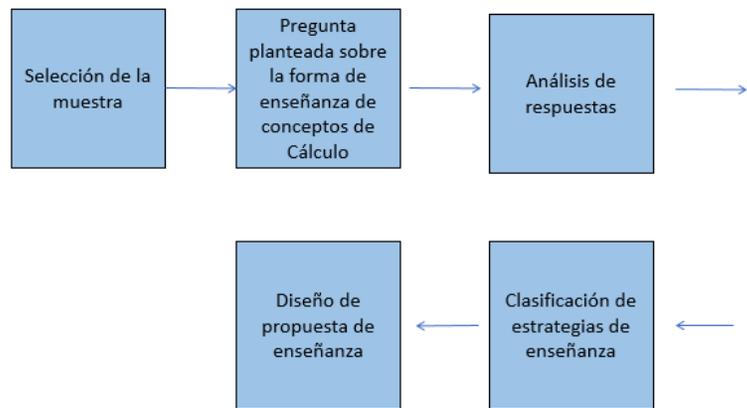
Método

Esta investigación es de naturaleza descriptiva y se realizó en dos etapas: en la primera, los participantes escribieron una explicación sobre la forma en que sus profesores presentaban los conceptos de cálculo, esto con el propósito de identificar estrategias de enseñanza empleadas para explicar dichos temas. En la segunda, se diseñó una propuesta de enseñanza que relaciona las estrategias identificadas en la primera fase con las propuestas de diferentes investigaciones que reportaron resultados favorables.

Descripción de la muestra

En el estudio participaron nueve estudiantes (dos mujeres y siete hombres) de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC) del Instituto Politécnico Nacional que ya habían cursado la asignatura Cálculo y se encontraban cursándola nuevamente. La muestra se tomó de 30 estudiantes que integraban un grupo de recursadores de la mencionada asignatura. La selección de estos se realizó tomando en cuenta que hubieran cursado dicha cátedra con diferentes profesores. En la figura 1 se muestra el diagrama del método de la investigación:

Figura 1. Diagrama del método empleado en la investigación



Fuente: Elaboración propia

Resultados

Para identificar las estrategias usadas por los profesores de Cálculo al momento de introducir los conceptos, se pidió a los estudiantes que escribieran una descripción de cómo los docentes iniciaban el estudio de los temas relacionados con la cátedra en general y el concepto de integral definida en específico. Las respuestas de los estudiantes se organizaron en cuatro categorías: lluvia de ideas, presentación discursiva, situaciones contextuales y relación con la derivada. En la tabla 1 se indica la frecuencia de los enfoques seleccionados en la presentación de los conceptos:

Tabla 1. Estrategias usadas en la presentación de conceptos de la asignatura Cálculo

Estrategia	N.º de estudiantes
Lluvia de ideas	2
Presentación discursiva	4
Situaciones contextuales	1
Relación con la derivada	2

Fuente: Elaboración propia

A continuación se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes:

1. **Lluvia de ideas:** Dos estudiantes refirieron que el concepto se presentaba en una discusión grupal mediante preguntas relacionadas con el concepto de estudio:

Estudiante: *El profesor inició el tema de integral definida con la pregunta ¿qué es la integral definida? Recuerdo que algunas respuestas fueron: “La integral es un área”, “La integral es una antiderivada”. Posteriormente el profesor planteó nuevas preguntas relacionadas con las respuestas que dimos. Las preguntas planteadas nos permitieron ver que no todas las integrales dan como resultado un área y que algunas integrales no se pueden calcular usando métodos de integración.*

2. **Presentación discursiva:** Cuatro estudiantes señalaron que el concepto se presentaba mediante explicaciones de las diferentes interpretaciones.

Estudiante: *El profesor inició con aproximaciones al área de una región usando sumas de Riemann con rectángulos inscritos y circunscritos. Después calculó el valor exacto con límites, posteriormente dio la definición de integral definida, demostró algunas reglas de integración y continuamos con ejercicios.*

3. **Situaciones contextuales.** Un estudiante manifestó que el concepto se presentaba mediante situaciones problemas relacionadas con el concepto a construir.

Estudiante: *El profesor dio varios problemas, elegimos uno para resolver en clase en parejas, después pasamos a explicarlo. Durante las exposiciones el profesor hizo preguntas relacionadas con los datos que se daban en el problema.*

4. **Relación con conceptos previos:** Dos estudiantes indicaron que el concepto se presentaba haciendo referencia a la derivada de una función.

Estudiante: *El profesor comenzó mencionando que la integral es el proceso inverso de la derivada, dio las gráficas de algunas funciones y las relacionamos con su derivada. Después dio las reglas de integración con base en las reglas de derivación y presentó algunos ejemplos.*

Por otro lado, a partir de estas respuestas de los estudiantes también se identificó que los instrumentos usados para evaluar la comprensión de los conceptos consistieron en participaciones en clase, tareas y exámenes.

Si bien el uso de cada uno de estos enfoques resultó exitoso para algunos alumnos (alumnos que aprobaron Cálculo), otros estudiantes no lograron acreditar la asignatura, dentro de ellos se encuentran los participantes en esta investigación.

Análisis de resultados

En la tabla 1 se observa que los profesores usan diferentes estrategias para presentar los conceptos de la materia de Cálculo (en particular con la integral definida), aunque predomina el enfoque discursivo. Este se caracteriza por centrarse en la conferencia como principal método de instrucción, lo cual significa que el énfasis recae en seleccionar la información. El papel del docente, por tanto, consiste en organizar las ideas del concepto y presentarlas a los estudiantes de la manera más clara posible, a través de definiciones, proposiciones y teoremas. Además, se ofrecen diversos ejemplos para que luego los estudiantes realicen ejercicios tomando como referencia los resueltos en clase.

El segundo lugar en cuanto al tipo de estrategias lo ocupan la lluvia de ideas y la relación con la derivada. En la primera de estas, se considera que los estudiantes han tenido en el nivel medio superior un primer acercamiento a los conceptos de esta disciplina. El papel del profesor, por ende, consiste en organizar las ideas de los estudiantes y luego plantear nuevas preguntas para confirmar o refutar sus ideas. De esta manera se fomenta la reflexión de los estudiantes. Un proceso similar intenta incentivar la estrategia de relacionar conceptos, pues se toman en cuenta los conocimientos previos de los alumnos para crear nuevas asociaciones.

Por último, con menor frecuencia, se encuentra la estrategia de usar situaciones contextuales como un recurso para introducir conceptos de cálculo. Este enfoque hace hincapié en el aprendizaje mediante la participación de los estudiantes. El papel del profesor consiste en diseñar actividades individuales o colaborativas que ayuden a los alumnos a aprender un concepto a través de la solución de problemas en contextos familiares. De esta manera se procura

que los estudiantes hagan referencia a la suma de cantidades formadas multiplicativamente, lo que puede llevarlos a la idea de la suma de Riemann. Asimismo, si los estudiantes identifican que en cada problema está involucrada una función (razón de cambio), entonces pueden vincular la solución del problema con la aplicación de la regla de Barrow.

En síntesis, se debe tener en cuenta que debido a que la materia de Cálculo de la carrera de ISC históricamente ha representado un gran reto para los estudiantes (lo cual se evidencia en el alto número de reprobados), se deben buscar estrategias de enseñanza y aprendizaje que contribuyan a una mejor comprensión de los conceptos.

Relacionando diferentes estrategias

Con base en las propuestas de enseñanza identificadas en las investigaciones centradas en el estudio de la integral definida, así como en los enfoques usados por profesores para introducir conceptos de cálculo en el nivel superior, se diseñó una propuesta de enseñanza que relaciona diferentes estrategias para el estudio de la integral definida.

Para ello, en primer lugar, se propone iniciar la enseñanza de este tema en el nivel universitario con situaciones en contextos específicos de variación y cambio (Cordero, 2005); esto con la intención de que los estudiantes puedan mostrar su visión del concepto y propiciar el surgimiento de las nociones matemáticas involucradas: función, intervalo cerrado, partición y razón de cambio. De esta manera, y con base en sus conocimientos previos, pueden plantear estrategias de solución, lo cual puede incentivar el interés de los estudiantes por aprender el concepto.

Para tener una idea de cómo podría ser este procedimiento a continuación se presenta el siguiente ejemplo: en un establo hay 6 vacas, a las cuales se les suministra alimento en un horario de 8 a. m. a 6 p. m. La cantidad de alimento por hora que va consumiendo una vaca va disminuyendo y puede expresarse aproximadamente por $f(t) = 4 - 0.32t$, siendo t las horas transcurridas a partir de las 8 a. m. y hasta las 6 p. m. Planteado esto, ¿qué cantidad de alimento consume una vaca desde la 1 p. m. hasta las 4 p. m.?

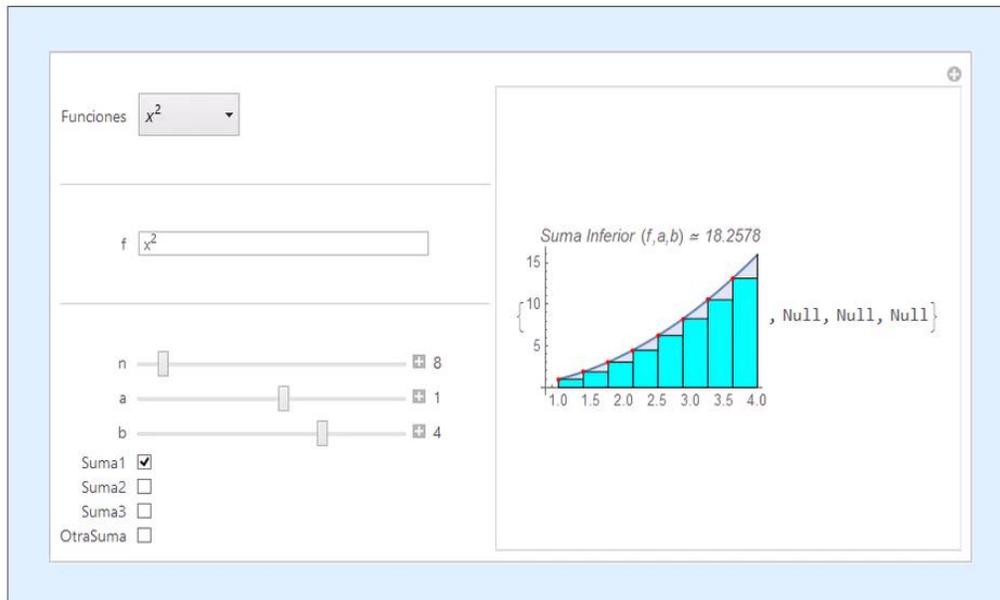
En esta situación el estudiante puede identificar los siguientes elementos: una función $f(t) = 4 - 0.32 t$, un intervalo que tiene que relacionar con el tiempo transcurrido y una función derivada que se puede relacionar con la frase “cantidad de alimento por hora”. Algunas de las opciones que podrían seguir los estudiantes para resolver este problema serían las siguientes: 1) sumas de Riemann usando particiones de una hora, 2) reglas de integración y regla de Barrow, 3) evaluar la función en los extremos del intervalo y obtener su diferencia. Si bien la última opción no conduce a una respuesta correcta, el profesor puede plantear preguntas relacionadas con su significado para generar la reflexión de los estudiantes.

Siguiendo el camino de la suma de Riemann, el profesor puede hacer énfasis en el significado de las cantidades formadas multiplicativamente $f(x)\Delta x$ tanto de forma algebraica como de forma gráfica (Boigues *et al.*, 2010). Además, puede propiciar la realización de particiones más finas para obtener mejores aproximaciones a la cantidad de alimento consumido en ese intervalo.

Siguiendo el camino de la regla de Barrow (y considerando que los estudiantes ya hayan tenido un primer acercamiento a este concepto en el nivel medio superior), pueden identificar la relación entre la función derivada y la función integral (Puga-Nathal, 2013). Posteriormente, se puede continuar con la estrategia relacionada con la lluvia de ideas para vincular el área con la cantidad de alimento consumido.

Posteriormente, y retomando la propuesta de Camacho *et al.* (2004, 2008), se puede seguir con el uso de algún *software* dinámico (p. ej., Geogebra) para construir aproximaciones a la integral definida mediante sumas superiores e inferiores, como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Sumas de Riemann



Fuente: Elaboración propia

Reflexiones finales

Si bien es cierto que en algunas investigaciones donde se emplean herramientas digitales diseñadas específicamente para el estudio de conceptos matemáticos se evidencian resultados favorables en cuanto al avance del conocimiento de los estudiantes, en esta investigación se determinó que los alumnos consultados reportaron que sus profesores no empleaban ese tipo de recursos. De hecho, los datos demuestran que predomina el enfoque discursivo, donde el papel del estudiante es replicar los ejemplos que se presentan en el salón de clase.

Por otra parte, para precisar si el modelo que relaciona diferentes estrategias para presentar la integral definida sirve para conseguir un aprendizaje más profundo de los conceptos, se debe implementar en situaciones donde se consideren las condiciones reales de un salón de clase: conocimientos previos, tiempo para abordar un tema, interés de los estudiantes por aprender, etc. Por tanto, es necesario hacer un análisis empírico para determinar la efectividad del modelo propuesto.

Referencias

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. and Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.
- Bezuidenhout, J. and Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. In Nakahara, T. and Koyama, M. (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of Group of the Psychology of Mathematics Education*, 2, 73-80.
- Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería relacionadas con las ciencias de la naturaleza: un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 255-282.
- Camacho, M., Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) DERIVE.
- Camacho, M. and Depool, R. (2003). Using Derive to understand the concept of Definite Integral. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 5, 1-16.
- Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20(3), 33-57.
- Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2004). La comprensión del concepto de área e integral definida en un entorno computacional. Perfiles de actuación. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, (6), 21-46.
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socio epistemología de la integral definida. *Relime*, 8(3), 265-286.
- Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. and Vidakovic, D. (2001). El Concept of definite integral: Coordination of two Schemas. In van de Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education*. 2 (pp. 297-304). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrech: Kluwer.

- Hernández, R. (2007). Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-20.
- Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9.^a ed.). México, D. F.: McGrawHill.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7.^a ed.). México: Oxford.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
- Puga-Nathal, K. L. (2013). *Construcción del esquema para la apropiación del concepto de la integral* (tesis doctoral). Guadalajara, México: Doctorado Interinstitucional en Educación, ITESO. Recuperado de <http://hdl.handle.net/11117/1205>.
- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 229-274.
- Thompson, P. W. and Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In Carlson, M. and Rasmussen, C. (eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*(9), 281-304.
- Turégano, M. P. (1998). Del área a la integral: un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 233-249.