Marco teórico y empírico para la estimación de sistemas de demanda

Theory and measurement of consumer demand systems

Carlos Reyes Sánchez
Instituto de Investigaciones y Estudios Superiores Económicos y Sociales (IIESES),
Universidad Veracruzana
carloreyes@uv.mx

Resumen

En el presente artículo se analiza el marco teórico y empírico para la estimación de los sistemas de demanda de consumo. Incluye una extensa revisión bibliográfica sobre las principales aportaciones que se han realiado en el campo de la especificación de las funciones de demanda, el enfoque dual, propiedades de las demandas de Marshall y de Hicks, los sistemas de demanda y las denominadas formas funcionales flexibles.

Palabras clave: Sistemas de demanda, análisis econométrico de la demanda, QUAIDS.

Abstract

This paper studies the theory and measurement of consumer behavior and its demand systems. Also, this paper introduce some of the most import contributions in the field of demand functions, the duality theorem, properties of Marshall and Hicks demands, demand systems, and the flexible demand system functional forms.

Key words: demand systems, demand econometric analysis, QUAIDS.

Fecha Recepción: Junio 2016 **Fecha Aceptación:** Diciembre 2016

---

1. Introducción

Una de las áreas con mayor reconocimiento en la teoría económica es la especificación, estimación, interpretación y aplicación de los sistemas de demanda del consumidor. Dichos sistemas nos permiten, entre otros aspectos, disponer de estimaciones de las elasticidades de sustitución respecto al precio y al gasto. También se utilizan para analizar el efecto de variables sociodemográficas sobre la demanda y realizar cálculos de bienestar, como por ejemplo, comparaciones de los niveles de vida de las diferentes familias (escalas de equivalencia). Los sistemas de demanda también son de interés para algunas cuestiones de política económica. Por ejemplo, la estimación del efecto sobre el consumo de ciertas medidas de política fiscal. Asimismo, se utilizan también para responder a cuestiones de importante trascendencia económica, como son si los consumidores eligen su demanda para maximizar su función de utilidad, o bien, para medir si el consumo dentro de los hogares se realiza a modo de economías de escala.

El punto de partida para la especificación teórica de los sistemas de demanda viene determinado por la definición de un sistema de preferencias para los consumidores. Habitualmente se asume de forma casi axiomática que las preferencias son reflexivas, completas, transitivas y continuas. Estos axiomas nos permiten ordenar y representar las preferencias a través de una función de utilidad que denotamos como $v(q)$, donde q es un vector n-dimensional de cantidades de bienes y/o servicios consumidos. Adicionalmente, en algunos trabajos empíricos se asume que las preferencias son convexas. Esto es, sean q^A y q^B tales que $q^A \succ q^B$ (en otros términos, siendo q^A preferible a q^B), entonces: $\lambda q^A + (1-\lambda)q^B \succ q^B$. Esto se traduce en funciones de utilidad quasi-cóncavas donde $v(q^A) \succ v(q^B)$ implica $v(\lambda q^A + (1-\lambda)q^B) \succ v(q^B)$ (Varian (1992)).

Todos estos supuestos son convenientes para algunas situaciones particulares. Sin embargo, son restrictivos y no modelan ciertos fenómenos que pueden ser importantes en situaciones empíricas. Por ejemplo, las preferencias estrictamente convexas no son compatibles con la existencia de bienes sustitutos, lo cual sucede frecuentemente en trabajos empíricos (véase Deaton y Muellbauer (1980a) cap.1 para una explicación más detallada).

Por otro lado, la maximización de la utilidad se sujeta a una restricción presupuestaria. La naturaleza de dicha restricción puede ser lineal o no lineal. Una restricción lineal implica, entre otras cosas, que no existe ninguna interdependencia entre los agentes económicos, así como incertidumbre e indivisibilidad. En cambio, las restricciones presupuestarias no lineales modelan, entre otras cosas, situaciones en las que existe información imperfecta, costos de transacción e interacción entre los agentes (véase Deaton y Muellbauer (1980a) cap.1 para una explicación más detallada).

De conformidad con las especificaciones anteriores, el caso más sencilllo surge cuando suponemos que $v(q)$ es diferenciable, estrictamente cuasi-cóncava y que el consumidor maximiza su utilidad sujeto a una restricción presupuestaria lineal, es decir:

$$\underset{q_i}{Max}\left\{v(q); p^{'}q = x\right\} \qquad (1)$$

Donde:

$p =$ vector n-dimensional de precios.

$q =$ vector n-dimensional de cantidades de bienes y/o servicios consumidos, $q \in \Re^{+}$.

$x =$ nivel de gasto.

Utilizando técnicas Lagrangeanas se pueden derivar las condiciones de primer orden, que vienen dadas por el siguiente conjunto de ecuaciones (Deaton 1986):

- $\dfrac{\partial v(q)}{\partial q_i} = \lambda p_i \quad \forall i \qquad (2)$
- $p' q = x \qquad (3)$

Dichas condiciones resuelven los sistemas de demanda marshalliana que denotaremos como $q_i = g_i(x, p)$. Dado que la dicha función satisface $p' q = x$, entonces la demanda de consumo está sujeta a las siguientes restricciones.

- Aditividad: $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(x, p) = x$ (4)

- Homogeneidad de grado cero[1]: $g_i(\theta x, \theta p) = g_i(x, p)$ (5)

Sin embargo, aún para derivar el caso más sencillo, las condiciones de primer orden frecuentemente no permiten deducir una solución analítica. Más aún, dicho modelo requiere suponer *a priori* una determinada forma funcional para la función de utilidad.

Por estos motivos una aproximación alternativa, que constituye el enfoque dominante en la literatura de referencia, es considerar un análisis dual. Mediante esta estrategia es posible obtener formas funcionales para la demanda marshalliana que no presupongan una determinada forma funcional para la función de utilidad, dotando al análisis empírico de una mayor flexibilidad.

2. Estimación de las curvas de Engel a partir del Enfoque Dual

El enfoque dual permite generar empíricamente formas funcionales para las curvas de Engel sin la necesidad de suponer *a priori* una determinada forma funcional para la función de utilidad. Este procedimiento consiste en minimizar el gasto necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad, esto es:

$$c(u, p) = \left\{ \min_q \; p * q; v(q) = u \right\} \qquad (6)$$

Donde:

$c(u, p)$ es la función de costos.

Se puede demostrar (vease Deaton y Muellbauer (1980a) cap. 2) que $c(u, p)$ satisface las siguientes propiedades:

1. Continua en p, existen las primeras y segundas derivadas con respecto a p.
2. Creciente en u, no decreciente en p y creciente en al menos un valor de p.
3. Homogénea de grado uno en precios: $c(u, \theta p) = \theta c(u, p)$.
4. Cóncava en los precios: $C(u, \theta p_1 + (1-\theta) p_2) \geq \theta C(u, p_1) + (1-\theta) C(u, p_2)$.

[1] La homogeneidad de grado cero también es conocida como ausencia de ilusión monetaria.

Dado que la maximización de la utilidad y la minimización del gasto total son equivalentes (véase Varian (1992)), el resultado del problema original es el mismo que el del problema dual. En el caso del problema dual, la solución es un conjunto de demandas $q_i = h_i(u, p)$ denominadas demandas compensadas o de Hicks. Dado que ambas soluciones coinciden, es inmediato percatares de que $q_i = g_i(x, p) = h_i(u, p)$. Además, podemos transformar la demanda de Hicks en demandas marshallianas. Para ello, introducimos la llamada función de utilidad indirecta $\Psi(x, p)$ que se define como la utilidad máxima que se puede alcanzar dado un nivel de precios p y un nivel de gasto total x, es decir:

$$\Psi(x, p) = \max\{v(q); p * q = x\} \qquad (7)$$

De esta manera, podemos derivar la demanda de Marshall sustituyendo la función de utilidad indirecta en la demanda de Hicks, es decir:

$$q_i = h_i(u, p) = h_i(\psi(x, p), p) = g_i(x, p) \qquad (8)$$

Por lo tanto, una simple sustitución nos permite pasar de la demanda de Hicks a la de Marshall, y viceversa. Para derivar la demanda de Hicks a partir de la demanda de Marshall, sustituimos para x el valor correspondiente a $c(u, p)$, de modo que:

$$q_i = g_i(x, p) = g_i[c(u, p), p] = h_i(x, p) \qquad (9)$$

La importancia de la representación dual es fundamental para anidar la información empírica con la teoría económica. En particular, el Teorema de Dualidad de Shephard-Uzawa nos permite recuperar, bajo ciertas condiciones[2], la función de utilidad a partir de la función de costos (para una demostración formal consultar McFadden (1978) o Diewert (1971)). De esta manera, toda la información de la función de utilidad $v(q)$ que es relevante para el análisis empírico esta contenida en la función de costos. Dicho de otro modo, cualquier función $c(u, p)$ con las correctas propiedades puede servir como alternativa para $v(q)$ como base del análisis empírico. Además, por el Lema de Shephard,

[2] Consultar Barten y Böhm (1982) para una explicación más detallada.

podemos derivar la demanda de Hicks a partir de la función de costos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial c(u, p)}{\partial p_i} = h_i(u, p) = q_i \qquad (10)$$

De esta manera, el enfoque dominante para trabajos empíricos sugiere partir de una función de costos y derivar las funciones de demanda hicksianas $h_i(u, p)$, las cuales a su vez, pueden ser transformadas en las correspondientes funciones de demanda marshallianas.

Un procedimiento equivalente al anterior sugiere tomar como referencia la función de utilidad indirecta $\psi(x, p)$, y derivar las funciones de demanda marshallianas. Esto es posible utilizando la Identidad de Roy que establece lo siguiente:

$$q_i = g_i(x, p) = -\frac{\partial \psi(x, p) / \partial p_i}{\partial \psi(x, p) / \partial x} \quad \forall i \qquad (11)$$

Habitualmente, la identidad de Roy se expresa en forma normalizada. En tal caso:

$$\psi(x, p) = \psi\left(1, p/x\right) = \psi^*(r) \qquad (12)$$

Donde $r = p/x$ es el vector de precios normalizados. De esta manera, utilizando ψ^* en lugar de ψ, la identidad de Roy puede escribirse de la siguiente manera:

$$w_i = \frac{p_i q_i}{x} = \frac{\partial \psi^* / \partial \log r_i}{\partial \psi^* / \partial \log r_k} = \frac{\partial \log c(u, p)}{\partial \log p_i} \qquad (13)$$

Donde:

$w_i = p_i q_i / x$ es la proporción de gasto del i-ésimo bien con relación al gasto total.

Por otro lado, la función de costos y la función de utilidad indirecta están íntimamente relacionadas. De hecho, ambas funciones son simplemente formas alternativas de escribir la misma información. Así, dado $x = c(u, p)$, podemos reordenar (invertir) la función de costos para obtener u en función de x y de p, es decir, para obtener la función de utilidad indirecta: $u = \Psi(x, p)$, y viceversa.

3. Propiedades de las demandas de Marshall y de Hicks

Se puede demostrar (Deaton y Muellbauer (1980a)) que las demandas marshallianas y de Hicks satisfacen las siguientes propiedades:

1. Integrabilidad:

   El valor de ambas demandas (de Marshall y de Hicks) es el gasto total. Es decir:

   $$\sum p_k h_k(u, p) = \sum p_k g_k(x, p) = x \qquad (14)$$

2. Homogeneidad:

   La demanda de Marshall es homogénea de grado cero en x y p; la demanda de Hicks es homogénea de grado cero en p, es decir:

   $$q_i = h_i(u, \theta p) = h_i(u, p) = g_i(\theta x, \theta p) = g_i(x, p) \qquad (15)$$

Es importante mencionar que ambas propiedades son consecuencia de asumir restricciones presupuestales lineales. Adicionalmente, la demanda de Hicks presenta las siguientes propiedades:

1. Simetría: Las derivadas cruzadas de los precios en las demandas hicksianas son simétricos, esto es, para $i \neq j$:

   $$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i} \qquad (16)$$

2. Negatividad: La matriz (nxn) formada por los elementos $\partial h_i / \partial p_j$ es semidefinida negativa. Esto es, para cualquier vector ξ (de dimensión n)[3]:

   $$\sum_i \sum_j \xi_i \xi_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \leq 0 \qquad (17)$$

La simetría es una garantía de la consistencia en la elección del consumidor. Sin ella, se realizan elecciones inconsistentes. Por su parte, la negatividad se deriva de que $\partial h_i / \partial p_j$

[3] La igualdad se cumple cuando ξ es proporcional a p.

es la matriz de derivadas de una función cóncava -$c(u, p)$- y por tanto, es semidefinida negativa.

Por otro lado, sean $s_{ij} = \partial h_i / \partial p_j$ los elementos de la matriz $S \in \Re_{nxn}$ denominada matriz de Slutsky (o bien, matriz de respuestas compensadas), la propiedad de negatividad implica una serie de restricciones en los elementos de S. La más importante es que los elementos de la diagonal tienen que ser no positivos, es decir: $s_{ii} \leq 0$. En términos económicos, esto significa que la demanda de un bien disminuye (o al menos, permanece constante) si se incrementa su precio.

4. Sistemas de demanda y formas funcionales flexibles

De conformidad con lo expuesto en la sección anterior, para hacer operativos los resultados de la teoría económica se requiere hacer explicita la forma de la función de costo (o de utilidad). En este sentido, para la estimación de sistemas de demanda, el enfoque dominante es considerar las llamadas *formas funcionales flexibles*. Esto es, utilizar aproximaciones a las funciones de utilidad (o de costo) en lugar de formas algebraicas específicas[4]. De esta manera, una forma funcional es seleccionada para aproximar la función de utilidad indirecta (o la función de costos). Posteriormente, las correspondientes ecuaciones de demanda son derivadas utilizando la Identidad de Roy o el Lema de Shephard.

Siguiendo a Fisher, Fleissig y Serletis (2001) los sistemas de demanda se pueden clasificar en formas funcionales localmente flexibles, globalmente regulares y globalmente flexibles.

4.1 Formas funcionales localmente flexibles: Las formas funcionales localmente flexibles también se conocen como modelos Taylor-Flexibles debido a que proceden de aproximaciones de Taylor. Se dice que un sistema de demanda es localmente flexible (o

[4] Dentro de los modelos que utilizan formas algebraicas específicas para generar la función de costos (o de utilidad) sobresalen los modelos de Stone (1954) y de Rotterdam (Theil (1965) y Barten (1964)). Sin embargo, ambos modelos se caracterizan por imponer restricciones (explicitas o implícitas) sobre la función de utilidad. Dichas restricciones, en muchos casos, se ven rechazados por la teoría económica (ver Deaton y Muellbauer (1980a) para un desarrollo más amplio).

flexible en el sentido Diewert (1971)) si los valores de las demandas marshallianas, sus derivadas y la función de costos pueden igualar los valores correspondientes a cualquier sistema de demanda integrable en un determinado valor de x y p. Es decir, puede aproximar localmente las funciones de demanda inducidas por una función de utilidad cualquiera. Dentro de esta familia de modelos destacan:

a. Modelo Generalizado de Leontieff (GL):

La función del modelo GL (Diewert (1971)) se puede aproximar de la siguiente manera:

$$u = \psi(x, p) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{p_i}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \left(\frac{p_i}{x} \right)^{1/2} \left(\frac{p_i}{x} \right)^{1/2} \qquad (18)$$

Caves y Christensen (1980) mostraron que GL tiene propiedades locales satisfactorias cuando las preferencias son homotéticas y la sustitución es baja. De esta manera, GL puede aproximar de manera adecuada preferencias Leontief. Sin embargo, cuando las preferencias no son homotéticas y la sustitución aumenta, se muestra que GL presenta baja región regular[5]. Las restricciones que se imponen en la estimación son simetría ($\beta_{ij} = \beta_{ji}$) e integrabilidad ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$).

b. Modelo *Translog*

Introducido por Christensen, Jorgenson y Lou (1975), el modelo *Translog*, en una de sus especificaciones, aproxima la función de utilidad indirecta utilizando la siguiente forma cuadrática para (p_k / x):

$$u = \psi(x, p) = \alpha_0 + \sum_{k} \alpha_k \log\left(\frac{p_k}{x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k} \sum_{j} \beta_{kj} \log(p_k / x) \log(p_j / x) \qquad (19)$$

Donde α_0, α_k y β_{kj} son parámetros a estimar. Dicha ecuación puede ser referida como una aproximación de Taylor en segundo orden de una función de utilidad cualquiera. Es interesante notar que, al igual que en el modelo generalizado de Leontieff (GL), dado que $\psi(x, p)$ es homogénea de grado cero, no existe ninguna restricción implicada por (p_k / x).

[5] Se entiende por región regular al conjunto de puntos del espacio precios-renta en el que se verifican las restricciones teóricas.

Las restricciones que se imponen en la estimación son simetría ($\beta_{ij} = \beta_{ji}$) e integrabilidad ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$).

Guilkey *et al* (1983) mostró que la modelización *translog* es satisfactorio si las preferencias son Cobb-Douglas, por lo que el modelo sólo es adecuado si la sustitución entre bienes es cercana a la unidad. Además, el modelo *translog* no es muy atractivo en el sentido de que resulta complicado de estimar econométricamente.

c. AIDS ("Almost Ideal Demad System")

Un modelo mas general, y con mayores atractivos para la estimación econométrica, es el llamado AIDS propuesto por Deaton y Muellbauer (1980b). Dicho modelo parte de la formulación para curvas de Engel de Working-Leser[6] que es frecuentemente utilizada en la literatura empírica:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \log x \qquad (20)$$

Asimismo, utiliza la siguiente función de costo:

$$\log c(u, p) = (1-u)\log a(p) + u \log b(p) \qquad (21)$$

Donde el sistema de preferencias implícito es el llamado PIGLOG[7] ("*Price Independent Generalizad Logarithmic*").

Sean $a(p)$ y $b(p)$ funciones de p , tales que adoptan la siguiente forma funcional flexible:

$$\log a(p) = a_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj}^{*} \log p_k \log p_j \qquad (22)$$

$$\log b(p) = \log a(p) + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \qquad (23)$$

Donde:

α , β y γ^{*} son parámetros.

Al sustituir los valores correspondientes a (22) y (23) en la ecuación (21), obtenemos:

[6] Estimada por primera vez por Working (1943) y usada por Leser (1963).
[7] Este tipo de funciones permite representar las demandas del mercado (agregadas) como si fueran resultado de las decisiones tomadas por un consumidor racional representativo. Véase Muellbauer (1976).

$$\log c(u,p) = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \qquad (24)$$

Las funciones de demanda se derivan directamente de la ecuación anterior utilizando el lema de Shephard y multiplicando ambos lados de la ecuación por $p_i / c(u,p)$. Es decir, siguiendo a Deaton y Muellbauer (1980b):

$$\frac{\partial c(u,p)}{\partial p_i} = q_i \Rightarrow \frac{\partial c(u,p)}{\partial p_i}\frac{p_i}{c(u,p)} = q_i \frac{p_i}{c(u,p)} \Rightarrow \frac{\partial \log c(u,p)}{\partial \log p_i} = \frac{p_i q_i}{c(u,p)} = w_i$$

$$\Rightarrow w_i = \frac{\partial \log c(u,p)}{\partial \log p_i} = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \qquad (25)$$

Donde:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*\right)$$

Dado que $x = c(u,p)$ se puede invertir para obtener $u = \Psi(x,p)$, si sustituimos este resultado en la ecuación anterior obtenemos la función de demanda de AIDS:

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log\left(\frac{x}{P}\right) \qquad (26)$$

Donde P es un índice de precios definido por:

$$\log P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj} \log p_k \log p_j \qquad (27)$$

Las condiciones de homogeneidad e integrabilidad se ven implícitas en la definición de (22) y (23), para las cuales:

i. $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$; $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} = 0$; $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} = 0$; $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 0$ (28)

ii. $\gamma_{kj} = \gamma_{jk}$ (29)

La restricción (i) garantiza la integrabilidad y homogeneidad de la función de costos; la restricción (ii) garantiza la simetría en los efectos sustitución. Además, el parámetro β_i en la ecuación de AIDS determina si los bienes son de lujo ($\beta_i > 0$) o necesarios ($\beta_i < 0$).

4.2 Formas Funcionales globalmente regulares: Los modelos anteriores, en los que se utilizan formas funcionales localmente flexibles, se caracterizan por tener problemas relacionados con la reducida dimensión de la región regular, asi como por la rigidez de las curvas de Engel que se derivan de los mismos. Una solución parcial a los problemas discutidos anteriormente, ha sido desarrollar formas funcionales flexibles que sean capaces de aproximar sistemas de demanda más generales. Dentro de la familia de modelos globalmente regulares destacan:

a. Modelo de Laurent:

Barnett (1983), Barnett y Lee (1985) y Barnett, Lee y Wolfe (1985, 1987) desarrollaron formas funcionales que utilizan series de expansión de Laurent como mecanismo de aproximación. En Barnett (1983) se trabaja con la inversa de la función de utilidad indirecta normalizada, es decir, con la ecuación (3). Así, la aproximación de Laurent a la función $\psi^*(r)$ se escribe como:

$$\psi^*(r) = \psi^*(w) = a_0 + 2a'w + w'Aw - 2b'\bar{w} - \bar{w}'B\bar{w} + R(w) \qquad (30)$$

Donde:

$$w = \left(\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}, \ldots, \sqrt{v_n}\right) \qquad (31)$$

$$\bar{w} = \left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right) \qquad (32)$$

$R(w)$ es el error de aproximación, y además supone que las matrices de parámetros $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ y $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ son simétricas. Asimismo, cuando el vector b y las matrices A y B son nulas, la expresión anterior da lugar al modelo GL visto anteriormente.

b. QUAIDS (“*Quadratic Almost Ideal Demand System*”):

Un modelo más general y con mayores atractivos para la estimación econométrica, es el llamado QUAIDS propuesto por Banks *et al* (1997). Banks *et al* (1997) demostró que las curvas de Engel para ropa y alcohol en UK son no-lineales en $\log x$, al mismo tiempo que las curvas de Engel para otros bienes, como alimentos, son lineales en $\log x$ (ver ecuación (8)), de modo que los sistemas de demanda de rango 2 pueden no ser apropiados para la estimación de curvas de Engel. Así, Banks *et al* (1997) desarrolló modelos de rango tres para flexibilizar el rango de respuestas de renta, permitiendo mejores ajustes a los comportamientos no lineales que se encuentran frecuentemente en los análisis empíricos de la demanda. Dicha evidencia empírica sugiere la siguiente forma general para las ecuaciones de Engel:

$$w_i = A_i(p) + B_i(p)\ln x + C_i(p)g(x) \qquad (33)$$

El rango de un sistema de demanda se define como el rango de la matriz constituida por los coeficientes de las ecuaciones de Engel[8]. Así, el rango de la ecuación anterior es igual al rango de la matriz de dimensión $N \times 3$ constituida por $N = 1,2,\ldots,N$ bienes y los coeficientes de dichas ecuaciones. Dado que dicha matriz únicamente tiene 3 columnas, el rango máximo posible es de 3.

En particular, Banks *et al* (1997) propone recoger las no linealidades observadas en la respuesta de la proporción de gasto en ciertos bienes ante cambios en el volumen total del consumo utilizando $g(x) = (\ln x)^2$ (ver corolario 1 en Banks *et al* (1997)).

La función de utilidad correspondiente al sistema de demanda QUAIDS es:

$$\ln \psi(v) = \left\{ \left(\frac{\ln x - \ln a(p)}{b(p)} \right)^{-1} + \lambda(p) \right\}^{-1} \qquad (34)$$

Donde $\lambda(p)$ es diferenciable y homogénea de grado cero en p (ver teorema 1 en Banks *et al* (1997)) y el término $(\ln x - \ln a(p))/(b(p))$ es la función de utilidad indirecta PIGLOG que, como se mencionó anteriormente, corresponde a sistemas de demanda AIDS. En particular, si $\lambda(p) = 0$, la función de utilidad indirecta resultante es la de AIDS, por lo que dicho sistema es un caso particular de QUAIDS.

Definimos, de conformidad con Banks *et al* (1997):

[8] Intuitivamente, que un sistema posea rango R, significa que existen R bienes tales que las curvas de Engel de cualquier otro bien se pueden expresar como combinación de las curvas de Engel de esos R bienes. De esta manera, todos aquellos sistemas de demanda con curvas de Engel lineales (ver ecuación 8) son de rango dos, con excepción de aquellas para las cuales las curvas de Engel asociadas parten del origen, en cuyo caso, el rango es 1.

$$\log a(p) = a_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j \qquad (35)$$

$$b(p) = \prod_i p_i^{\beta_i} \qquad (36)$$

$$\lambda(p) = \sum_i \lambda_i \log p_i \qquad (37)$$

Sustituyendo (35), (36) y (37) en la ecuación (34) se obtiene:

$$\psi(x, p) = \left\{ \left(\frac{\log x - \alpha_0 - \sum_k \alpha_k \log p_k - \frac{1}{2}\sum_k \sum_j \gamma_{kj}^* \log p_k \log p_j}{\prod_i p_i^{\beta_i}} \right)^{-1} + \sum_i \lambda_i \log p_i \right\}^{-1} \qquad (38)$$

Al aplicar la identidad de Roy en la ecuación anterior, luego de efectuar las correspondientes manipulaciones algebraicas, obtenemos la ecuación tradicional del sistema de demanda QUAIDS:

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \log\left(\frac{x}{a(p)}\right) + \frac{\lambda_i}{\prod_k p_k^{\beta_k}} \left(\log\left(\frac{x}{a(p)}\right)\right)^2 + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j \qquad (39)$$

Nuevamente, la ecuación anterior corresponde a un sistema AIDS si $\lambda_i = 0$. De esta manera, una de las grandes aportaciones del modelo QUAIDS es que incluye como casos particulares al modelo AIDS, ampliamente utilizado en la literatura empírica.

4.3 Formas funcionales globalmente flexibles: Las formas funcionales consideradas hasta el momento son capaces de aproximar localmente una función arbitraria en un punto determinado dentro de una vecindad δ de tamaño pequeño (y desconocido). Un acercamiento más general para aproximar al verdadero proceso de generación de los datos es utilizar formas funcionales con propiedades globales. La idea que subyace en este tipo de aproximaciones (también denominadas semiparamétricas) es ampliar el orden de la base de expansión cuando aumenta el tamaño de la muestra hasta conseguir convergencia asintótica a la función verdadera (y sus derivadas).

a. El modelo de Fourier:

Gallant (1981) propone una aproximación de Fourier a la función de utilidad indirecta normalizada, que es:

$$\psi^{*}(v) = a_0 + b'v + \frac{1}{2}v'Cv + \sum_{\alpha=1}^{A}\sum_{j=-J}^{J} a_{j\alpha}\exp\{ijk'_{\alpha}v\} \qquad (40)$$

Donde:

$C = -\sum_{\alpha=1}^{A} a_{0\alpha}k_{\alpha}k'_{\alpha}$ y $a_{j\alpha} = \bar{a}_{j\alpha}$, y a_0, $a_{j\alpha}$, b y C son parámetros.

Aún y cuando las propiedades de aproximación del modelo de Gallant (1981) son favorables y presentan flexibilidad global, el gran inconveniente es que para lograr dicha flexibilidad, las restricciones paramétricas resultan excesivamente limitativas (Ramajo, 2001).

b. Modelo Asintoticamente Ideal (AIM):

El modelo conocido como asintoticamente ideal propuesto por Barnett y Jonas (1983) está basado en una versión multivariante del tipo Müntz-Szatz a la función de utilidad indirecta, que es:

$$\psi(v) = a_0 + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}v_i^{\lambda(k)} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}\left[\sum_{(i,j)\in A} a_{ijkm}v_i^{\lambda(k)}v_j^{\lambda(m)}\right] + \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}\sum_{l=1}^{K}\left[\sum_{(i,j,h)\in B} a_{ijhkml}v_i^{\lambda(k)}v_j^{\lambda(m)}v_h^{\lambda(l)}\right] + \ldots$$

Donde:

$$A = \{(i,j); i,j = 1,2,\ldots,n \mid i \neq j\},\ B = \{(i,j,h); i,j,h = 1,2,\ldots,n \mid i \neq j \neq h\},\ \lambda(s) = 2^{-s} \qquad (41)$$

El modelo AIM además de ser globalmente flexible, permite contrastar o imponer de forma muy sencilla la regularidad teórica global. Sin embargo, en la aplicación práctica, las condiciones suficientes para imponer la consistencia teórica pueden ser excesivamente restrictivas y afectar la consistencia de los estimadores, de tal forma que el modelo restringido resulte rechazado por los datos (Ramajo, 2001).

Fisher, Fleissig y Serletis (2001) comparan distintos sistemas de demanda sobre un mismo conjunto de datos de consumo en los E.E.U.U Estos sistemas abarcan formas localmente flexibles (GL, Translog y AIDS), especificaciones regulares sobre la muestra (Laurent, QUAIDS y GEF) y, por último, formas funcionales globalmente flexibles (Fourier y Müntz-Sztaz). Con una amplia batería de contrastes de comparación, Fisher *et al* concluyen que las funciones con propiedades globales funcionan mejor, sobre todo las que tienen buenas propiedades asintóticas (QUAIDS, Fourier y Müntz-Sztaz). Gorman (1981) mostró que el máximo rango posible para un sistema de demanda es 3. Esto implica que no se gana mucho introduciendo términos adicionales en (33), ya que al introducir más columnas en la matriz de coeficientes, éstas serán linealmente dependientes de las otras. Este resultado es confirmado por la evidencia empírica (Banks et al (1997) y Lyssiotou et al (1999)). En particular, los sistemas de demanda que incluyen factores sociodemográficos generalmente son de rango 3 (Lewbel, 1997). De esta forma, el modelo QUAIDS se perfila como un modelo general capaz de modelar las restricciones en los datos y contrastarlos estadísticamente de conformidad con la teoría económica.

5. Conclusiones

La estimación de sistemas de demanda del consumidor se consolida en torno a una fuerte trayectoria teórica, con el atractivo de ofrecer un amplio abanico de instrumentos para la simulación, elaboración y evaluación de escenarios de políticas económicas. Un primer acercamiento, fundamental para anidar la información empírica con la teoría económica, lo constituye el enfoque dual. De esta manera, resulta posible generar empíricamente formas funcionales para las curvas de Engel sin la necesidad de suponer *a priori* una determinada forma funcional para la función de utilidad.

Para la estimación de los sistemas de demanda, el enfoque dominante es aproximar las funciones de demanda inducidas por una función de utilidad cualquiera, es decir, utilizar formas funcionales flexibles. En tal caso, los modelos QUAIDS plantean un sistema de ecuaciones de demanda adecuados a la teoría del consumidor y con importantes atributos empíricos.

Bibliografía

Banks, J., R. Blundell, A. Lewbel (1997): "Quadratic Engel Curves and Consumer Demand"; *The Review of Economics and Statistics*, 79(4): 527-539.

Barten, A.P., V. Böhn (1982): "Consumer Theory" en K. Arrow y M. Intriligator (eds.). *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II . Amsterdam: North Holland.

Barnett W.A. (1983): "New indices of money supply and the flexible Laurent demand system"; *Journal of Business and Economic Statistics*, 1: 7-23.

Barnett W.A., Jonas A (1983): "The Muntz-Szatz demand system: an application of a globally well-behaved series expansion"; *Economic Letters*, 11(4): 337-342.

Barnett W.A., Lee Y.W., Wolfe M.D. (1985): "The three-dimensional global properties of the Minflex Laurent, generalized Leontief, and translog flexible functional forms"; *Journal of Econometrics* 30: 3-31.

Barnett W.A., Lee Y.W., Wolfe M.D. (1987): "The global properties of the two Minflex Laurent flexible functional forms"; *Journal of Econometrics* 36: 281-298.

Caves D., Christensen L. (1980): "Global properties of flexible functional forms"; *American Economic Review* 70:422-432.

Christensen L.R., Jorgenson D.W., Lau L.J. (1975): "Transcendental logarithmic utility functions"; *American Economic Review*, 65:367-383.

Deaton, A., J. Muellbauer (1980a): *Economics and Consumer Behaviour*; Cambridge: Cambridge University Press.

Deaton, A., J. Muellbauer *(1980b): "An Almost Ideal Demand System"; American* Economic Review, 70(3): 312-326.

Deaton, A. (1986): "Demand Analysis" en Griliches, Z. y M. Intriligator (eds.), Handbook of Econometrics, vol. III. Amsterdam: North-Holland.

Diewert, W.E. (1971): "An Application of the Shephard Duality Theorem: a Generalized Leontief Production Function"; *Journal of Political Economy*; 79(3): 481-507.

Fisher, D., A. Fleissig, A. Serletis (2001): "An Empirical Comparison of Flexible Demand System Functional Forms"; *Journal of Applied Econometrics*; 16(1): 59-80.

Gallant A.R. (1981): "On the bias in flexible functional forms and an essentially unbiased form: the Fourier flexible form"; *Journal of Econometrics*, 15:211-245.

Gorman, W. M. (1981): "Some Engel Curves" en A. Deaton (ed.); *Essays in The Theory and Measurement of Consumer Behaviour in Honor of Sir Richard Stone*; Cambridge: Cambridge University Press.

Guilkey D., Lovell C., Sickles C. (1983): "A comparison of the performance of three flexible functional forms"; *International Economic Review*, 24:591-616.

Leser, C.E.V., (1963): "Forms of the Engel function". *Econometrica*, V.31 694-703.

Lewbel, A. (1997): "Consumer Demand Systems and Household Equivalence Scales" en M. Pesaran y P. Schmidt (eds.), *Handbook of Applied Econometrics*, vol. II. Oxford: Blackwell Publishers.

Lyssiotou, P., P. Pashardes, T. Stengos (1999): "Preference Heterogeneity and the Rank of Demand Systems"; *Journal of Business & Economic Statistics*, 17(2): 248-252.

Mcfadden, D. (1978): "Costs, Revenue and Profit Functions" en M. Fuss y D. McFadden (eds.), *Production Economics: a Dual Approach to Theory and Applications*. Amsterdam: North Holland.

Muellbauer (1976), "Community preferences and the representative consumer", *Econometrica*; 44, pp. 979-999.

Ramajo, J. (2001): "Avances recientes en el análisis econométrico de la demanda", *Economía agraria y recursos naturales. Nuevos enfoques y perspectivas, Asociación Española de Economía Agraria*, España, Cap. 9: 211-249.

Stone, R. (1954): "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis, an Application to the Patter of British Demand"; Economic Journal; Vol. 64: 511-527.

Theil, H. (1965): "The Information Approach to Demand Analysis"; Econometrica; 33: 67-87.

Varian, H. (1992): *Microeconomic Analysis*, 3ª ed. New York: W. W.

Norton & Company.

Working, H., 1943, "Statical laws of family expenditure", Journal of the American Statistical Association, Vol.38. No 21: 43-56.