Contribuciones didácticas para la comprensión del tema de derivada de la función potencia en cálculo diferencial

Didactic contributions to understanding the issue of derivative function power differential calculus

Allen A. Castillo Barrón
Universidad Autónoma de Baja California
allen.castillo@uabc.edu.mx

Luis Ramón Siero González
Universidad Autónoma de Baja California
lsiero@uabc.edu.mx

Juan A. Paz González
Universidad Autónoma de Baja California
pazj@uabc.edu.mx

Alejandra Jiménez Vega
Universidad Autónoma de Baja California
ale.jv.28@uabc.edu.mx

Resumen

La presente investigación se realizó en la Escuela de Ciencias de la Ingeniería y la Tecnología (ECITEC) de la Universidad Autónoma del Estado de Baja California, tiene el propósito de presentar la demostración de la derivada de la función potencia por medio de inducción matemática, así como dos actividades didácticas aplicadas a la ingeniería, lo anterior se realizó para la materia de cálculo diferencial que se imparte a alumnos del nivel universitario que cursan el tronco común de ocho carreras de ingeniería: Industrial, civil, aeroespacial, eléctrica, mecánica, mecatrónica, energías renovables y bioingeniería. El mejoramiento de las didácticas utilizadas en estas materias es fundamental y tiene importantes consecuencias en muchas áreas del cálculo y el análisis matemático en la formación de las ciencias de la ingeniería.

Abstract

The present investigation was made in The School of Science of Engineering and Technology (for its acronym in Spanish ECITEC) of the Autonomous University of Baja California, it has the purpose to present the demonstration of the derivate of the power function, by mathematical induction as well as two didactical activities with application to engineering, it was applied at the course of differential calculus, which is a fundamental class to eight engineering careers. The improvement of the didactical activities that are used for the class are essential and have important consequences in many areas of calculus and mathematical analysis in the preparation of engineers.

Palabras clave / Key words: Derivada, función potencia, inducción matemática, ingeniería / Derivative, power function, mathematical induction, engineering.

---

1. Introducción

La formación de futuros ingenieros se ha estudiado desde diferentes perspectivas en el área de la matemática educativa (Bissell y Dillon, 2000; Macias, 2012; Kent y Noss, 2002), estos trabajos mostraron que la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros cubre todo una gama de diferentes necesidades particulares, por esta razón las actividades didácticas específicamente en las materias del tronco común de ingeniería son de gran importancia para que los alumnos de los primeros semestres puedan apreciar sus utilidades. Usualmente en un curso de cálculo diferencial la demostración de la derivada de la función potencia se realiza en base al teorema del binomio, lo cual implica que el estudiante debe tener conocimientos de combinatoria y de sumatorias. En ocasiones el alumno no posee dichos conocimientos, por lo tanto, el tener una forma alternativa para brindar la demostración sin la necesidad de que el estudiante conozca el teorema del binomio, es una herramienta muy útil para la labor docente. La deducción de la derivada de la función potencia por medio del método de inducción matemática permitirá al maestro dar la demostración usando exclusivamente herramientas propias del cálculo diferencial.

2. Desarrollo

Demostración clásica

Los autores de cálculo diferencial «clásicos» (Stewart, 2008; Larson, 2010; Leithold, 1998; Ayres, 1971) ofrecen la siguiente demostración para la derivada de la función potencia

Dada la función

$$f(x) = x^n \qquad (1)$$

Partiendo de la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad (2)$$

En donde es necesario desarrollar $(x+h)^n$, y para realizar este desarrollo se debe utilizar el teorema del binomio

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} h^k \tag{3}$$

En donde se requiere el conocimiento de cálculo de factoriales y combinaciones, así como el uso de series. Sustituyendo (3) en (2)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \tag{4}$$

En la ecuación (4) se puede eliminar el término x^n

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \tag{5}$$

Eliminando h se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \tag{6}$$

y tomando el límite de (6)

$$f'(x) = nx^{n-1} \tag{7}$$

con lo cual queda finalizada la demostración.

La demostración no es muy complicada, sin embargo se requiere que el estudiante posea conocimientos previos del teorema del binomio.

Aunque otros autores presentan demostraciones diferentes (Edwards, 2008) que se basan en álgebra, utilizando teoremas de factorización, en contraste la demostración por inducción matemática enseña al estudiante una herramienta que le ayudará a resolver demostraciones de teoremas en problemas futuros, así como repasar derivadas previamente demostradas.

Demostración por inducción matemática

Para poder realizar la demostración es necesario conocer previamente la derivada de x, x2, x3, así como la derivada del producto de dos funciones.

Demostración

Es conocido que la derivada de x es 1, la derivada de x2 es 2x y la derivada de x3 es 3x2, las cuales se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1 = 1 \cdot x^0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x = 2x^1 \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Parece existir un patrón, el cual se puede expresar como

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad (9)$$

Sin embargo esta relación necesita ser demostrada, para esto se utilizará el método de inducción matemática (Sominskii, 1990), la cual indica que una fórmula es verdadera si:

1. La proposición es cierta para $n=1$.
2. Partiendo de que la premisa es verdadera para n, entonces lo es también para $n+1$.

En (8) se observa claramente que la proposición es verdadera para $n=1$.

Para completar la demostración es necesario que partiendo de (9) se deduzca

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1)x^n \qquad (10)$$

Multiplicando (9) por x

$$x\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}x = nx^n \qquad (11)$$

y sumando xn a ambos lados de (11)

$$x^n + x\frac{d}{dx}(x^n) = nx^n + x^n = (n+1)x^n \qquad (12)$$

Se observa que los miembros derechos de (10) y (12) son idénticos, entonces para terminar la demostración es necesario demostrar que los miembros izquierdos de (10) y (12) son iguales

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = x^n + x\frac{d}{dx}(x^n) \qquad (13)$$

Recordando la derivada del producto

$$\frac{d}{dx}[u(x)\cdot v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}[v(x)] + v(x)\frac{d}{dx}[u(x)] \qquad (14)$$

Identificando a $u(x) = x$ y $v(x) = x^n$ en el miembro izquierdo de (13) y sus derivadas como

$$\frac{d}{dx}[u(x)] = 1 \qquad \frac{d}{dx}[v(x)] = nx^{n-1} \qquad (15)$$

Sustituyendo (15) en (14) se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = x \cdot nx^{n-1} + x^{n} \cdot 1 = (n+1)x^{n} \tag{16}$$

Lo que se quería demostrar.

Entonces se han satisfecho los dos requerimientos de la inducción matemática, por lo tanto (9) es verdadera

$$\frac{d}{dx}(x^{n}) = nx^{n-1} \quad \forall\, n \in N : n \geq 1 \tag{17}$$

Actividades didácticas

En el estudio de una ingeniería, el estudiante se enfrentará a muchos problemas para los cuales necesita determinar patrones, sin embargo no tiene una herramienta que de certeza a que sus conjeturas son ciertas. A continuación se presentan dos problemas que encontrará en determinado punto de su carrera.

Ejercicio 1

Demostrar que la suma Sn de los primeros n números naturales es

$$S_{n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{18}$$

La proposición es verdadera para n=1.

Partiendo de (18) se debe demostrar que

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{19}$$

Sumando (n+1) a (19)

$$S_n + (n+1) = S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \tag{20}$$

Rearreglando

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{21}$$

y la demostración ha quedado completada.

Ejercicio 2

Demostrar la fórmula de De Moivre

$$\left[Cos(x) + iSen(x)\right]^n = Cos(nx) + iSen(nx) \tag{22}$$

Considerando las siguientes identidades:

$$Cos(a+b) = Cos(a)\ Cos(b) - Sen(a)\ Sen(b)$$

$$Sen(a+b) = Cos(a)\ Sen(b) + Sen(a)\ Cos(b) \tag{23}$$

La expresión (22) es cierta para n=1, ya que resulta en la identidad de Euler.

Entonces se debe demostrar que partiendo de (22) se puede obtener

$$[Cos(x) + iSen(x)]^{n+1} = Cos[(n+1)x] + iSen[(n+1)x] \tag{24}$$

Multiplicando (22) por la identidad de Euler se obtiene

$$[Cos(x) + iSen(x)]^{n}\ [Cos(x) + iSen(x)] = [Cos(nx) + iSen(nx)][Cos(x) + iSen(x)] \tag{25}$$

Rearreglando

$$[Cos(x) + iSen(x)]^{n+1} = Cos(nx)\ Cos(x) - Sen(nx)\ Sen(x) + iCos(nx)\ Sen(x) + iSen(nx)\ Cos(x) \tag{26}$$

donde los primeros dos términos del miembro derecho se pueden expresar como

$$Cos(nx)\ Cos(x) - Sen(nx)\ Sen(x) = Cos(nx + x) = Cos[(n+1)x] \tag{27}$$

y el tercer término puede ser reescrito de la forma

$$iCos(nx)\ Sen(x) + iSen(nx)\ Cos(x) = iSen[nx + x] = iSen[(n+1)x] \tag{28}$$

Sustituyendo (27) y (28) en (26)

$$[Cos(x) + iSen(x)]^{n+1} = Cos[(n+1)x] + iSen[(n+1)x] \tag{29}$$

Lo que se quería demostrar.

3. Conclusión

La demostración por inducción matemática de esta fórmula permite al estudiante un primer acercamiento formal a este tipo de demostraciones que podrá emplear en su ingeniería, así como repasar derivadas previamente estudiadas.

El estudiante de ingeniería aprende una importante herramienta para demostrar de forma estricta los patrones que observará en diversos fenómenos físicos durante su carrera.

Bibliografía

Bissell, C. y Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics, 20*(3), 3-11.

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Kent, P. y Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1 -39/7). London U.K.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas. México: Cencage learning.

Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2010). Cálculo Esencial. México: Cencage learning.

Leithold, L. (1998). El Cálculo. México: Oxford University Press.

Ayres, F. (1971). Cálculo Diferencial e Integral. México: Mc Graw-Hill

Edwards, C., y Penney, D. (2008). Cálculo con Trascendentes Tempranas. México: Pearson Education.

Sominskii, I.S. (1990). El método de la inducción matemática. En El método de la inducción matemática (14-19). México: Limusa.